参考答案

19. 解:(1)∵抛物线 $y=ax^2+bx+2$ 经过 $A(-1,0)$,$B(4,0)$ 两点,

∴$\begin{cases}a-b+2=0,\\16a+4b+2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2},\\b=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$

∴抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$.

易知点 C 的坐标为(0,2).

当 $y=2$ 时,即 $-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2=2$,

解得 $x_1=3$,$x_2=0$.

∴点 D 的坐标为(3,2).

(2)由题意可知 A,E 两点都在 x 轴上,则 AE 有两种可能:

①当 AE 为一边时,则 AE∥PD,∴$P_1(0,2)$.

②当 AE 为对角线时,由平行四边形相对的两个顶点到另一条对角线的距离相等,可知点 P、点 D 到直线 AE(即 x 轴)的距离相等,∴点 P 的纵坐标为−2.

将 $y=-2$ 代入抛物线的解析式,得 $-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2=-2$,

解得 $x_1=\frac{3+\sqrt{41}}{2}$,$x_2=\frac{3-\sqrt{41}}{2}$.

∴点 P 的坐标为 $\left(\frac{3+\sqrt{41}}{2},-2\right)$ 或 $\left(\frac{3-\sqrt{41}}{2},-2\right)$.

综上所述,点 P 的坐标为(0,2)或 $\left(\frac{3+\sqrt{41}}{2},-2\right)$ 或 $\left(\frac{3-\sqrt{41}}{2},-2\right)$.

(3)存在满足条件的点 P. 显然点 P 在直线 CD 的下方.

设直线 PQ 交 x 轴于点 F,点 P 的坐标为 $\left(m,-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2\right)$.

当点 P 在 y 轴右侧时,如图 1,则 $CQ=CQ'=m$,$PQ=PQ'=2-\left(-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2\right)=\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m$.

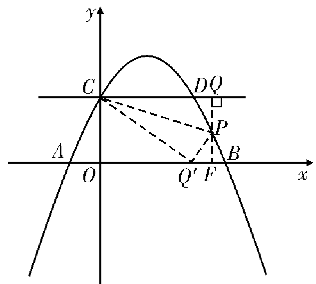


图1

(第 19 题)

∵$\angle CQ'O+\angle FQ'P=90°$,$\angle CQ'O+\angle OCQ'=90°$,

∴$\angle OCQ'=\angle FQ'P$.

又∵$\angle COQ'=\angle Q'FP=90°$,

∴$\triangle COQ'\backsim\triangle Q'FP$,

∴$\frac{Q'C}{PQ'}=\frac{CO}{Q'F}$,即 $\frac{m}{\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m}=\frac{2}{Q'F}$,

解得 $Q'F=m-3$.

∴$OQ'=OF-Q'F=m-(m-3)=3$,

∴$CQ=CQ'=\sqrt{OQ'^2+CO^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

∴$m=\sqrt{13}$.

∴点 P 的坐标为 $\left(\sqrt{13},\frac{-9+3\sqrt{13}}{2}\right)$.

当点 P 在 y 轴左侧时,如图 2,此时 $m<0$,$-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2<0$,则 $CQ=CQ'=-m$,$PQ=PQ'=2-\left(-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2\right)=\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m$.

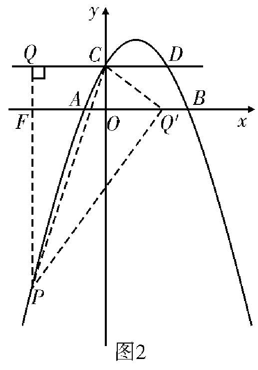


图2

(第 19 题)

$\because \angle CQ'O+\angle FQ'P=90°, \angle CQ'O+\angle OCQ'=90°$,

$\therefore \angle OCQ'=\angle FQ'P$.

又$\because \angle COQ'=\angle Q'FP=90°$,

$\therefore \triangle COQ' \backsim \triangle Q'FP$,

$\therefore \frac{Q'C}{PQ'}=\frac{CO}{Q'F}$，即$\frac{-m}{\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m}=\frac{2}{Q'F}$,

解得 $Q'F=3-m$.

$\therefore OQ'=3, CQ=CQ'=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

$\therefore m=-\sqrt{13}$.

$\therefore$点 P 的坐标为$\left(-\sqrt{13}, \frac{-9-3\sqrt{13}}{2}\right)$.

综上所述，满足条件的点 P 的坐标为$\left(\sqrt{13}, \frac{-9+3\sqrt{13}}{2}\right)$或$\left(-\sqrt{13}, \frac{-9-3\sqrt{13}}{2}\right)$.

20. 解：(1)把点 A(4,0)，B(1,3)代入 $y=ax^2+bx$，

得$\begin{cases}16a+4b=0,\\ a+b=3,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=-1,\\ b=4.\end{cases}$

$\therefore$抛物线的解析式为 $y=-x^2+4x$.

(2)如图 1，过点 P 作 $PD\perp BH$，交 BH 于点 D.

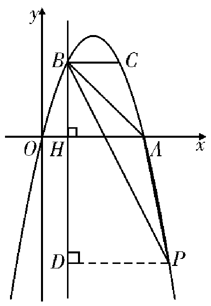


图1

（第 20 题）

设 $P(m, -m^2+4m)$，根据题意，得

$BH=AH=3, HD=m^2-4m, PD=m-1$.

$\therefore S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABH}+S_{梯形HAPD}-S_{\triangle BPD}=\frac{1}{2}\times 3\times 3+\frac{1}{2}(3+m-1)\cdot(m^2-4m)-\frac{1}{2}(m-1)(3+m^2-4m)=6$.

整理，得 $3m^2-15m=0$.

解得 $m_1=0$(舍去)，$m_2=5$.

$\therefore$点 P 的坐标为(5，-5).

(3)$\triangle CMN$ 的面积为$\frac{5}{2}$或$\frac{29}{2}$或 17 或 5.

提示：以点 C，M，N 为顶点的三角形为等腰直角三角形时，分三类情况讨论.

①以点 M 为直角顶点且点 M 在 x 轴上方时，如图 2，则 $CM=MN$，$\angle CMN=90°$.

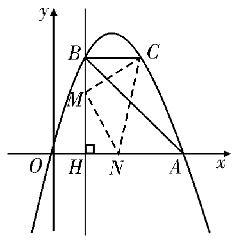


图2

（第 20 题）

易证得$\triangle CBM\cong\triangle MHN$，

$\therefore MH=BC=2, HN=BM=3-2=1$，

$\therefore M(1,2), N(2,0)$.

由勾股定理，得 $CM=MN=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

$\therefore S_{\triangle CMN}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}=\frac{5}{2}$.

以点 M 为直角顶点且点 M 在 x 轴下方时，如图 3，作辅助线，构建如图 3 所示的两直角三角形：$Rt\triangle NEM$和 $Rt\triangle MDC$.

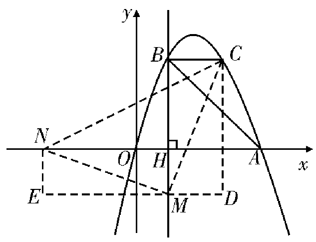


图3

（第 20 题）

易证得 $Rt\triangle NEM\cong Rt\triangle MDC$，

$\therefore EM=CD=5, NE=MD=2$.

由勾股定理，得 $CM=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$.

$\therefore S_{\triangle CMN}=\frac{1}{2}\times\sqrt{29}\times\sqrt{29}=\frac{29}{2}$.

②以点 N 为直角顶点且点 N 在 y 轴左侧时，如图 4，则 $CN=MN$，$\angle MNC=90°$，作辅助线.

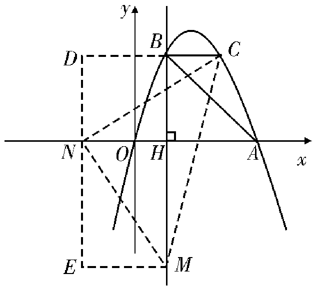


图4

（第 20 题）

同理可得 $CN=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$，

$\therefore S_{\triangle CMN}=\frac{1}{2}\times\sqrt{34}\times\sqrt{34}=17$.

以点 N 为直角顶点且点 N 在 y 轴右侧时，作辅助线，如图 5，同理可得 $CN=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$，

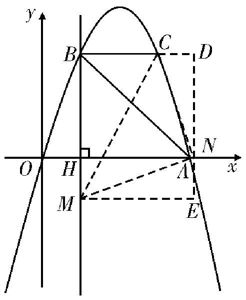


图5

（第 20 题）

$\therefore S_{\triangle CMN}=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}=5$.

③以点 C 为直角顶点时，不能构成满足条件的等腰直角三角形.

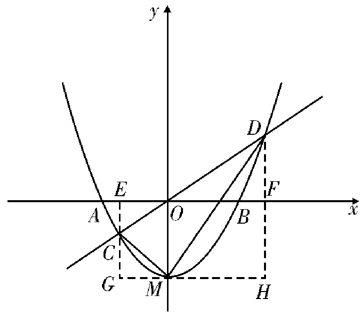
综上所述，△CMN 的面积为$\frac{5}{2}$或$\frac{29}{2}$或 17 或 5.

21. 解：(1)∵ 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 的顶点为 $M(0,-1)$，∴$b=0,c=-1$.

∴抛物线的解析式为 $y=x^2-1$.

(2)$MC\perp MD$. 理由如下：

如图，分别过点 C，D 作 y 轴的平行线，交 x 轴于点 E，F，过点 M 作 x 轴的平行线交 EC 于点 G，交 DF 于点 H.



（第 21 题）

设 $D(m,m^2-1)$，$C(n,n^2-1)$.

$\therefore OE=-n, CE=1-n^2, OF=m, DF=m^2-1$.

$\because OM=1, \therefore CG=n^2, DH=m^2$.

$\because EG\parallel DH, \therefore \frac{CE}{DF}=\frac{OE}{OF}$，即$\frac{1-n^2}{m^2-1}=\frac{-n}{m}$，

解得 $m=-\frac{1}{n}$ 或 $m=n$（舍去）.

$\because \frac{CG}{GM}=\frac{n^2}{-n}=-n, \frac{MH}{DH}=\frac{m}{m^2}=\frac{1}{m}=-n$，

$\therefore \frac{CG}{GM}=\frac{MH}{DH}$.

又∵$\angle CGM=\angle MHD=90^\circ$，

∴$\triangle CGM\backsim\triangle MHD$，

∴$\angle CMG=\angle MDH$.

∵$\angle MDH+\angle DMH=90^\circ$，

∴$\angle CMG+\angle DMH=90^\circ$，

∴$\angle CMD=90^\circ$，即 $MC\perp MD$.

22. 解：(1)∵抛物线 $y=\frac{1}{4}(x-m)^2$ 经过点 $B(0,1)$，

$\therefore \frac{1}{4}m^2=1$，解得 $m=\pm2$.

∵顶点 A 在 x 轴正半轴上，

$\therefore m=2$.

∴抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{4}(x-2)^2=\frac{1}{4}x^2-x+1$.

(2)如图 1，连接 HQ 交 AP 于点 R，过点 Q 作 $QD\perp x$ 轴于点 D.

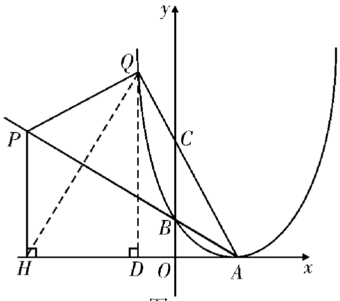


图1

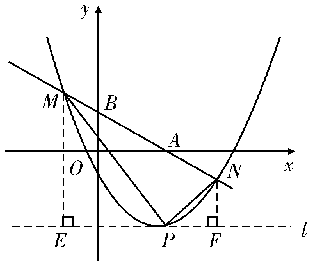


图2

（第 22 题）

∵点 A(2,0),B(0,1),

∴OA=2,OB=1,∴$AB=\sqrt{5}$,

∴$\tan\angle BAO=\frac{1}{2}$,$\sin\angle BAO=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

由翻折的性质,得 AP⊥QH,

∴∠HAR+∠QHD=90°.

又∵∠DQH+∠QHD=90°,

∴∠DQH=∠HAR.

∴$\tan\angle DQH=\tan\angle HAR=\frac{1}{2}$.

设 DH=a,则 $DQ=\frac{DH}{\tan\angle DQH}=2a$.

∴$QH=\sqrt{a^2+(2a)^2}=\sqrt{5}a$.

∴$RH=\frac{1}{2}QH=\frac{\sqrt{5}}{2}a$.

在 Rt△ARH 中,$AH=\frac{RH}{\sin\angle HAR}=\frac{5}{2}a$.

∴$OD=\frac{5}{2}a-a-2=\frac{3}{2}a-2$.

∴$Q\left(2-\frac{3}{2}a,2a\right)$.

∵点 Q 在抛物线上,

∴$\frac{1}{4}\left(2-\frac{3}{2}a-2\right)^2=2a$,

解得 $a=\frac{32}{9}$ 或 a=0(舍去).

∴点 Q 的坐标为$\left(-\frac{10}{3},\frac{64}{9}\right)$.

(3)如图 2,过点 P 作 x 轴的平行线 l,过点 M 作 ME⊥l 于点 E,过点 N 作 NF⊥l 于点 F.

∵∠MPN=90°,

∴∠MPE+∠NPF=180°−90°=90°.

又∵∠MPE+∠PME=180°−90°=90°,

∴∠NPF=∠PME.

又∵∠MEP=∠PFN=90°,

∴△MEP∽△PFN,

∴$\frac{ME}{PF}=\frac{PE}{NF}$,即$\frac{y_M+n}{x_N-2}=\frac{2-x_M}{y_N+n}$,

∴$x_M\cdot x_N-2(x_M+x_N)+4+y_M\cdot y_N+n(y_M+y_N)+n^2=0$.

∵抛物线向下平移 n 个单位长度,

∴平移后的抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{4}(x-2)^2-n$.

设直线 AB 的解析式为 y=kx+d,将 A(2,0),B(0,1)代入,得

$\begin{cases}2k+d=0,\\d=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\d=1.\end{cases}$

∴直线 AB 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+1$.

联立方程组,得$\begin{cases}y=\frac{1}{4}(x-2)^2-n,\\y=-\frac{1}{2}x+1.\end{cases}$

消掉 y,得 $x^2-2x-4n=0$.

∴$x_M+x_N=-\frac{b}{a}=-\frac{-2}{1}=2$,

$x_M\cdot x_N=\frac{c}{a}=\frac{-4n}{1}=-4n$.

∴$y_M+y_N=-\frac{1}{2}x_M+1-\frac{1}{2}x_N+1=-\frac{1}{2}(x_M+x_N)+2=-\frac{1}{2}\times2+2=1$,

$y_M\cdot y_N=\left(-\frac{1}{2}x_M+1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}x_N+1\right)=\frac{1}{4}x_M\cdot$

$x_N-\frac{1}{2}(x_M+x_N)+1=\frac{1}{4}\cdot(-4n)-\frac{1}{2}\times2+1=-n.$

$\therefore -4n-2\times2+4+(-n)+n\times1+n^2=0$，

整理，得 $n^2-4n=0$，

解得 $n_1=4,n_2=0$（舍去）.

∴当 $n=4$ 时，$\angle MPN=90°$.

23. 解：(1)配方，得 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-1$，

∴抛物线的对称轴为 $x=2$，顶点为 $P(2,-1)$.

将 $x=0$ 代入 $y=\frac{1}{2}x^2-2x+1$，得 $y=1$，

∴点 A 的坐标是(0,1).

由抛物线的对称性知，点 A(0,1)与点 B 关于直线 $x=2$ 对称，

∴点 B 的坐标是(4,1).

设直线 l 的解析式为 $y=kx+b(k\neq0)$，将点 B，P 的坐标代入，得$\begin{cases}4k+b=1,\\2k+b=-1,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=1,\\b=-3.\end{cases}$

∴直线 l 的函数解析式为 $y=x-3$.

(2)常规做法如下：

如图，连接 AD 交 O′C 于点 E.

∵点 D 由点 A 沿 O′C 翻折得到，

∴O′C 垂直平分 AD.

由(1)知，点 C 的坐标为(0,−3)，

∴在 $Rt\triangle AO'C$ 中，$O'A=2,AC=4$，

$\therefore O'C=2\sqrt{5}$.

$\because S_{\triangle AO'C}=\frac{1}{2}\cdot O'C\cdot AE=\frac{1}{2}\cdot O'A\cdot AC$，

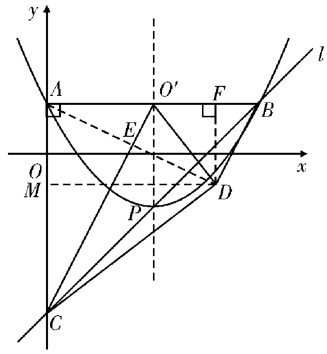
$\therefore AE=\frac{4}{5}\sqrt{5},AD=2AE=\frac{8}{5}\sqrt{5}$.

过点 D 作 DF⊥AB 于点 F，易证 $Rt\triangle ADF\backsim Rt\triangle CO'A$.

$\therefore \frac{AF}{CA}=\frac{DF}{O'A}=\frac{AD}{CO'}$，

$\therefore AF=\frac{AD}{O'C}\cdot AC=\frac{16}{5},DF=\frac{AD}{O'C}\cdot O'A=\frac{8}{5}$.

∴点 D 的坐标为$\left(\frac{16}{5},-\frac{3}{5}\right)$.



（第 23 题）

借助书中提到的规律也可以这样来做：

如图，过点 D 作 x 轴的平行线交 y 轴于点 M.

在 $Rt\triangle AO'C$ 中，$O'A=2,AC=4$，

∴三边满足 $1:2:\sqrt{5}$，翻折得到 $3:4:5$ 的 $Rt\triangle DMC$.

$\because DC=AC=4,\therefore DM=\frac{16}{5},CM=\frac{12}{5}$.

又∵OC=3，

∴点 D 的纵坐标为$\frac{12}{5}-3=-\frac{3}{5}$.

∴点 D 的坐标为$\left(\frac{16}{5},-\frac{3}{5}\right)$.

(3)显然，O′P∥AC，且 O′为 AB 的中点，

∴点 P 是线段 BC 的中点，$\therefore S_{\triangle DPC}=S_{\triangle DPB}$.

故要使 $S_{\triangle DQC}=S_{\triangle DPB}$，只需 $S_{\triangle DQC}=S_{\triangle DPC}$.

过点 P 作直线 m 与 CD 平行，则直线 m 上的任意一点与 CD 构成的三角形的面积都等于 $S_{\triangle DPC}$，故 m 与抛物线的交点即符合条件的点 Q.

容易求得过点 C(0,−3)，D$\left(\frac{16}{5},-\frac{3}{5}\right)$的直线的解析式为 $y=\frac{3}{4}x-3$.

∴设直线 m 的解析式为 $y=\frac{3}{4}x+d$，将 P(2,−1)代入，得$\frac{3}{4}\times2+d=-1$，解得 $d=-\frac{5}{2}$.

∴直线 m 的解析式为$y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{2}$.

联立方程组，得$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x^2-2x+1,\\y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{2},\end{cases}$

解得$\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=-1, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=\frac{7}{2}, \\ y_2=\frac{1}{8}. \end{cases}$

因此，抛物线上存在点Q，使得$S_{\triangle DQC}=S_{\triangle DPB}$，点Q的坐标为(2，-1)或$\left(\frac{7}{2},\frac{1}{8}\right)$.

24. 解：(1)由对称性可知∠AOB=∠DOB.

∵四边形OABC是矩形，∴CB∥OA，

∴∠EBO=∠AOB，∴∠EBO=∠EOB，

∴OE=BE.

设点E的坐标为(x，m)，∴OE=BE=2m-x.

在$Rt\triangle OCE$中，$CE^2+OC^2=OE^2$，

∴$x^2+m^2=(2m-x)^2$，解得$x=\frac{3m}{4}$，

∴$E\left(\frac{3m}{4},m\right)$.

(2)∵∠EMC与∠MOB互余，OE=BE，

∴EF是OB的垂直平分线，

∴∠BEF=∠OEF.

∵OA∥CB，

∴∠BEF=∠OFE.

∴∠OEF=∠OFE.

∴$OF=OE=BE=CB-CE=2m-\frac{3m}{4}=\frac{5m}{4}$.

∵CE∥OA，

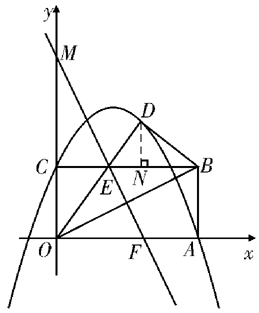
∴△MCE∽△MOF，

∴$\frac{CM}{OM}=\frac{CE}{OF}$，即$\frac{5-m}{5}=\frac{\frac{3m}{4}}{\frac{5m}{4}}$，解得m=2.

∴点C，E的坐标分别为(0，2)，$\left(\frac{3}{2},2\right)$.

∴$BD=2, DE=4-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}, BE=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$.

如图，过点D作DN⊥BC，垂足为点N.



(第24题)

∵$S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}BD\cdot DE=\frac{1}{2}BE\cdot DN$，

∴$DN=\frac{2\times\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}}=\frac{6}{5}$.

∴在$Rt\triangle EDN$中，

$EN=\sqrt{DE^2-DN^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{6}{5}\right)^2}=\frac{9}{10}$.

∴$CN=CE+EN=\frac{12}{5}$.

∴点D的坐标为$\left(\frac{12}{5},\frac{16}{5}\right)$

将点$D\left(\frac{12}{5},\frac{16}{5}\right)$，A(4，0)，C(0，2)代入$y=ax^2+bx+c$中，得$\begin{cases} \frac{144}{25}a+\frac{12}{5}b+c=\frac{16}{5}, \\ 16a+4b+c=0, \\ c=2, \end{cases}$

解得$\begin{cases} a=-\frac{5}{8}, \\ b=2, \\ c=2. \end{cases}$

∴该抛物线的解析式为$y=-\frac{5}{8}x^2+2x+2$.

(3)存在. 点P的坐标为$\left(\frac{8+4\sqrt{7}}{5},\frac{4}{5}\right)$或$\left(\frac{8-4\sqrt{7}}{5},\frac{4}{5}\right)$.