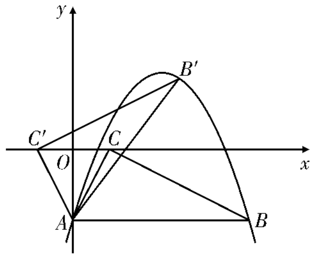
例 7 (2013 年大连二模第 26 题)如图,二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的最大值为 $\frac{13}{6}$,其图象经过点 $A(0,-2)$,$B(5,-2)$. 点 C 在 x 轴上,$\angle ACB=90°$,且 $CA<CB$. 将△ABC 绕点 A 逆时针旋转,使点 C 的对应点 C' 落在 x 轴上.

(1)求二次函数的解析式.

(2)求点 B 的对应点 B' 的坐标,并判断点 B' 是否落在二次函数的图象上.

(3)设 AB' 与 x 轴相交于点 P,在二次函数的图象上是否存在点 Q,使 $S_{\triangle B'PQ}=S_{\triangle OAP}$? 若存在,求出点 Q 的坐标(直接写出结果);若不存在,说明理由.



(例 7)

试题分析:(1)根据点 A 和点 B 的坐标以及二次函数的最大值,可以知道抛物线的顶点坐标,所以本题可以用顶点式来求解析式.

(2)判断点 B' 是否落在二次函数的图象上,需要知道点 B' 的坐标. 为此,过点 B' 作 x 轴的垂线,求出线段 $B'E$ 和 OE 的长.

(3)本题中△OAP 的面积是可求的,所以△$B'PQ$ 的面积也就算是已知的,因此可以用平行定位法或者分割组合法求出点 Q 的坐标.

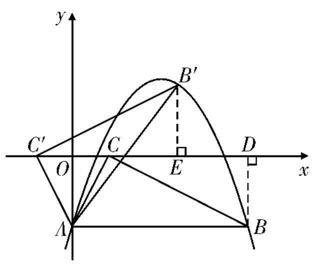
解:(1)设二次函数的解析式为 $y=a\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{13}{6}$.

∵二次函数的图象经过点 $A(0,-2)$,

∴$a\left(-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{13}{6}=-2$,解得 $a=-\frac{2}{3}$.

∴二次函数的解析式为 $y=-\frac{2}{3}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{13}{6}=-\frac{2}{3}x^2+\frac{10}{3}x-2$.

(2)如答图,过点 B 作 $BD\perp x$ 轴,过点 B 作 $B'E\perp x$ 轴,垂足分别为点 D,E.



(例 7 答图)

∵$\angle ACB=\angle AC'B'=90°$,

∴$\angle BCD=90°-\angle ACC'$,$\angle B'C'E=90°-\angle AC'C$.

∵$AC=AC'$,

∴$\angle AC'C=\angle ACC'$.

∴$\angle B'C'E=\angle BCD$.

又∵$B'C'=BC$,$\angle B'EC'=\angle BDC=90°$,

∴△$B'C'E$≌△BCD.

$\therefore B'E=BD=2, C'E=CD.$

$\because \triangle AOC, \triangle BCD, \triangle ABC$ 均为直角三角形,

$\therefore (x_C^2+2^2)+[(5-x_C)^2+2^2]=5^2$,

解得 $x_C=1$ 或 $x_C=4$(舍去).

$\therefore C'E=CD=5-1=4.$

$\because AC'=AC, AO\perp CC'$,

$\therefore OC'=OC=1.$

$\therefore OE=C'E-OC'=3$,

$\therefore x_E=3.$

$\therefore$点 B'的坐标为(3,2).

当 $x=3$ 时,$y=-\frac{2}{3}\times 3^2+\frac{10}{3}\times 3-2=2.$

$\therefore$点 B'落在二次函数 $y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{10}{3}x-2$ 的图象上.

(3)存在.点 Q 的坐标为$\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2},\frac{2\sqrt{21}-6}{3}\right)$或$\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2},-\frac{2\sqrt{21}+6}{3}\right)$.

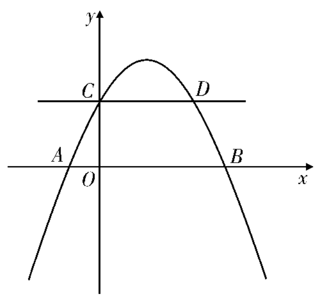
揭秘中考练习题

19. 如图,抛物线 $y=ax^2+bx+2$ 交 x 轴于 $A(-1,0)$,$B(4,0)$两点,交 y 轴于点 C,与过点 C 且平行于 x 轴的直线交抛物线于另一点 D,点 P 是抛物线上一动点.

(1)求抛物线的解析式及点 D 的坐标.

(2)点 E 在 x 轴上,若以 A,E,D,P 为顶点的四边形是平行四边形,求此时点 P 的坐标.

(3)过点 P 作直线 CD 的垂线,垂足为点 Q,若将$\triangle CPQ$ 沿 CP 翻折,点 Q 的对应点为 Q'.是否存在点 P,使点 Q'恰好落在 x 轴上?若存在,求出此时点 P 的坐标;若不存在,说明理由.



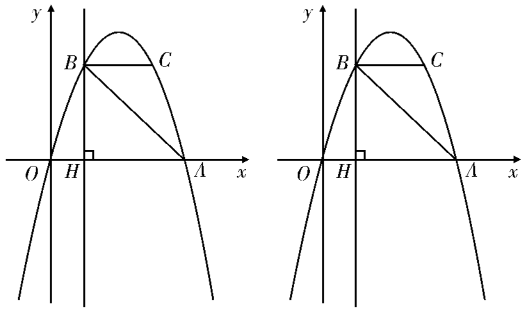
(第 19 题)

20. 如图，抛物线 $y=ax^2+bx$ 过 $A(4,0)$，$B(1,3)$ 两点，点 C，B 关于抛物线的对称轴对称，过点 B 作直线 $BH\perp x$ 轴，交 x 轴于点 H.

(1)求抛物线的解析式.

(2)点 P 是抛物线上一动点，且位于第四象限，当$\triangle ABP$ 的面积为 6 时，求出点 P 的坐标.

(3)若点 M 在直线 BH 上运动，点 N 在 x 轴上运动，当以点 C，M，N 为顶点的三角形为等腰直角三角形时，请直接写出此时$\triangle CMN$ 的面积.



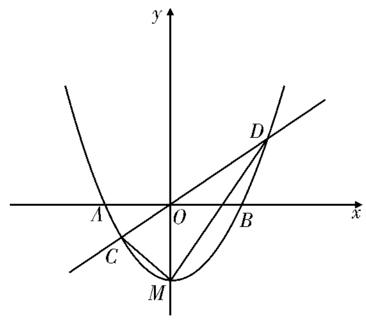
备用图

（第 20 题）

21. 如图,已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 的顶点为 $M(0,-1)$,与 x 轴交于 A,B 两点.

(1)求抛物线的解析式.

(2)过原点的任意直线(不与 y 轴重合)交抛物线于 C,D 两点,连接 MC,MD,试判断 MC,MD 是否垂直,并说明理由.



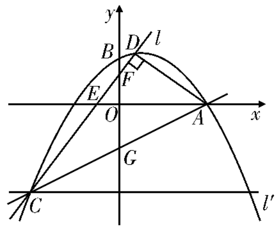
(第 21 题)

例8 (2015年大连一模第26题)如图,抛物线 $y=mx^2+nx+\frac{13}{3}n$ 与 x 轴的正半轴、y 轴分别相交于点 A,B.直线 l 与该抛物线相交于点 C,D,与 x 轴、y 轴分别相交于点 E,F.直线 CA 与 y 轴相交于点 G,直线 l' 经过点 C,且与直线 l 关于直线 CA 对称.若 $AD\perp$ 直线 l,直线 $l'\parallel x$ 轴,直线 l 的解析式为 $y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$,$CD=8$.

(1)填空:点 E,F 的坐标分别为____________________.

(2)求该抛物线的解析式.

(3)设点 P 为抛物线上的一个动点,连接 PB,PG,当 $S_{\triangle PBG}=\frac{25}{96}S_{\triangle CAD}$ 时,求点 P 的坐标(直接写出结果).



(例8)

试题分析:(1)分别令 x 和 y 等于零,即可求出点 E,F 的坐标.

(2)要求抛物线的解析式,需要知道抛物线上一些特征点的坐标.本题中最有特点的是点 C,其次是点 A,最后是点 B,D.图形的对称翻折就有角平分线产生,又因为有平行线,所以就一定会有等腰三角形出现,比如图中的 $\triangle ACE$,以此为契机,就能找到问题的突破口,从而解决问题.

(3)问与例1(3)有些相似,$\triangle CAD$ 的面积可求,$\triangle PBG$ 中可以作为底的边 BG 也可求,从而点 P 到 y 轴的距离就可求,即点 P 的横坐标就变得已知了.

解:(1)$(-1,0)$,$\left(0,\frac{4}{3}\right)$

(2)如答图,过点 A 作 $AH\perp$ 直线 l',过点 C 作 $CK\perp x$ 轴,垂足分别为点 H,K.

∵直线 $l'\parallel x$ 轴,

∴$KC=AH$.

∵直线 l 与直线 l' 关于直线 CA 对称,

∴$\angle DCA=\angle ACH$.

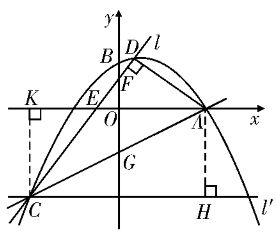
∵$AD\perp$ 直线 l,

∴$AD=AH=KC$.

又∵$\angle KEC=\angle DEA$,$\angle CKE=\angle ADE=90°$,

∴$\triangle KCE\cong\triangle DAE$.

∴$KE=DE$,$EC=EA$.



(例8答图)

设点 C 的坐标为$\left(t,\frac{4}{3}t+\frac{4}{3}\right)$,

则 $CD=CE+ED=CE+KE$,

即$\sqrt{(-1-t)^2+\left[-\left(\frac{4}{3}t+\frac{4}{3}\right)\right]^2}+(-1-t)=8$,

解得 $t=-4$ 或 $t=11$(舍去).

$\therefore \frac{4}{3}t+\frac{4}{3}=-4$,

∴点 C 的坐标为$(-4,-4)$.

$\therefore OA=EA-EO=EC-EO=\sqrt{(-4+1)^2+4^2}-1=4$,

∴点 A 的坐标为$(4,0)$.

∵抛物线过点 $A(4,0)$,$C(-4,-4)$,

$\therefore \begin{cases}16m+4n+\frac{13}{3}n=0,\\16m-4n+\frac{13}{3}n=-4,\end{cases}$

解得$\begin{cases}m=-\frac{25}{96},\\n=\frac{1}{2}.\end{cases}$

∴该抛物线的解析式为 $y=-\frac{25}{96}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{13}{6}$.

(3)点 P 的坐标为$\left(2,\frac{17}{8}\right)$或$\left(-2,\frac{1}{8}\right)$.

说明:本书中《学生必会》讲过的规律 1:平分三边比为 $3:4:5$ 的三角形中较大的锐角后,便可得到三边比为 $1:2:\sqrt{5}$ 的直角三角形.过点 A 作 $AH\perp l'$,垂足为点 H,则有 $AD=AH$,$CD=CH=8$.设直线 l' 与 y 轴相交于点 M,由题意可知,$\triangle FMC$ 就是三边比为 $3:4:5$ 的直角三角形.又因为 CG 平分$\angle FCM$,根据规律 1,可知$\triangle CGM$ 就是三边比 $1:2:\sqrt{5}$ 的直角三角形,即$\triangle CAH$ 是三边比为 $1:2:\sqrt{5}$ 的直角三角形.又因为 $CH=8$,所以 $AH=4$,因而得到点 C 的坐标为$(-4,-4)$,点 A 的坐标为$(4,0)$,进而求出抛物线的解析式.因此,如果能够掌握并运用这些规律,在解决一些类似的问题时就会得到事半功倍的效果.

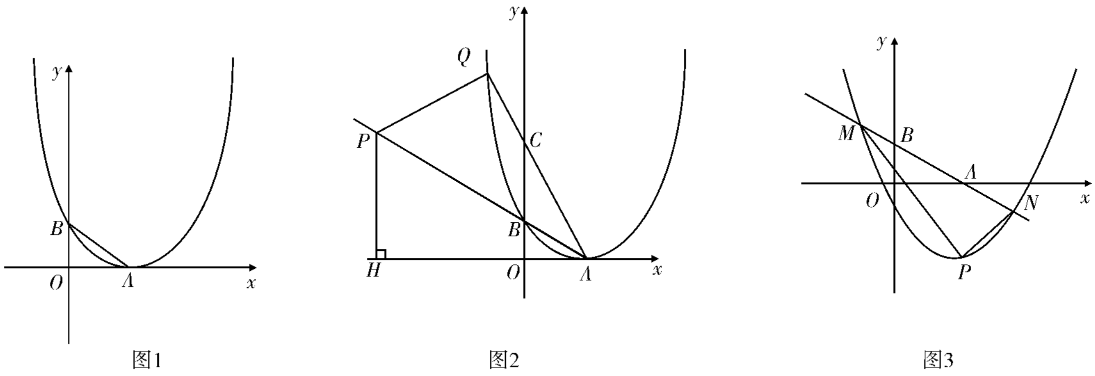
揭秘中考练习题

22. 如图 1,抛物线 $y=\frac{1}{4}(x-m)^2$ 的顶点 A 在 x 轴正半轴上,与 y 轴相交于点 $B(0,1)$,连接 AB.

(1)求抛物线的解析式.

(2)如图 2,P 为 AB 延长线上一点,$PH\perp x$ 轴于点 H,将$\triangle PAH$ 沿直线 AB 翻折得到$\triangle PAQ$,QA 交 y 轴于点 C,若点 Q 恰好在抛物线上,求点 Q 的坐标.

(3)如图 3,将图 1 中的抛物线沿对称轴向下平移 n 个单位长度,新抛物线与直线 AB 相交于 M,N 两点,它的顶点为 P,连接 PM,PN. 探究:当 n 取何值时,$\angle MPN=90°$?



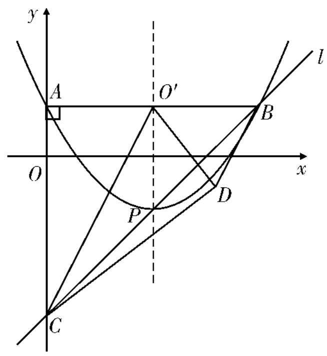
(第 22 题)

23. 如图，已知抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-2x+1$ 的顶点为 P，A 为抛物线与 y 轴的交点，过点 A 且与 y 轴垂直的直线与抛物线的另一交点为 B，与抛物线对称轴交于点 O'，过点 B，P 的直线 l 交 y 轴于点 C，连接 $O'C$，将△ACO' 沿 $O'C$ 翻折后，点 A 落在点 D 的位置.

(1)求直线 l 的函数解析式.

(2)求点 D 的坐标.

(3)抛物线上是否存在点 Q，使得 $S_{\triangle DQC}=S_{\triangle DPB}$？若存在，求出所有符合条件的点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由.



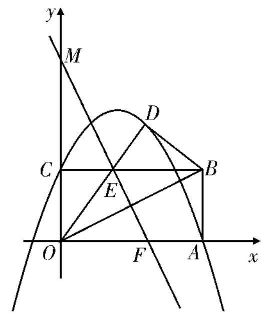
（第 23 题）

24. 如图，在平面直角坐标系中，矩形 $OABC$ 的顶点 A，C 分别在 x 轴和 y 轴的正半轴上，顶点 B 的坐标为$(2m,m)$. 沿着 OB 翻折$\triangle OAB$，设点 A 的对应点为点 D，OD 与 BC 相交于点 E，点 M 在 y 轴上，直线 ME 与 x 轴相交于点 F，且$\angle EMC$ 与$\angle MOB$ 互余，经过点 A，C，D 的抛物线为 $y=ax^2+bx+c$.

(1)求点 E 的坐标(用含 m 的式子表示).

(2)若点 M 的坐标为$(0,5)$，求该抛物线的解析式.

(3)在(2)的条件下，在线段 CB 下方的抛物线上是否存在点 P，使$\triangle CEP$ 与$\triangle BDE$ 的面积比为 $3:5$? 若存在，请直接写出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.



(第 24 题)